Problema echilibrului și aplicații

Doctorand:
Burjan-Mosoni Boglárka

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de matematică și informatică

Conducător de doctorat:
Prof. Dr. Kassay Gábor

Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de matematică și informatică

FONDUL SOCIAL EUROPEAN Programul Operaţional Sectorial pentru Dezvoltarea Resurselor Umane 2007 – 2013 Axa prioritară 1. Educaţia şi formarea profesională în sprijinul creşterii economice şi dezvoltării societăţii bazate pe cunoaştere Domeniul major de intervenţie 1.5. Programe doctorale şi postdoctorale în sprijinul cercetării Contract nr: POSDRU/6/1.5/S/3: „STUDII DOCTORALE: PRIN ŞTIINŢĂ SPRE SOCIETATE"

Autoarea dorește să mulțumească pentru suportul financiar din Programul co-finanțat de Operațional Sectorial pentru Dezvoltare Resurselor Umane 2007 - 2013, Contract POSDRU 6/1.5/S/3 - „STUDII DOCTORALE: PRIN ŞTIINŢĂ SPRE SOCIETATE"

Cluj-Napoca

2012

Cuprins

Introducere

Una dintre cele mai importante probleme în analiza neliniară este așa numita problemă de echilibru scalar (prescurtat (EP)), care se poate formula, după cum urmează: fie A și B două mulțimi nevide și $f : A \times B \to \mathbb{R}$ o funcție dată. Problema constă în găsirea unui element $\bar{a} \in A$, astfel încât

$$f(\bar{a}, b) \geq 0, \quad \text{pentru orice } b \in B. \tag{1}$$

Elementul $\bar{a}$ care satisface (1) se numește *punctul de echilibru* al lui f pe $A \times B$.

(EP) a fost intens studiat în ultimii ani (de ex. [27], [28], [29], [30], [31], [82], [83], [84], [88] respectiv lucrările de referință citate în cele amintite). Pe lângă semnificația teoretică, apar tot mai multe probleme din domeniile economiei, mecanicii, electronicii și ale altor științe aplicate care susțin studierea (EP). Problemele de echilibru includ cazuri particulare ca *probleme de optimizare scalară și vectorială, problema punctului șa (minimax), inegalități variaționale, problema de echilibru Nash*, etc.

Din câte știm, denumirea "equilibrium problem" a fost stabilită în [31], însă problema propriu-zisă fusese studiată în urmă cu mai mult de douăzeci de ani într-un articol scris de Ky Fan [69] în legătură cu așa numitele "intersection theorems" (rezultate care stabilesc caracterul nevid al unei familii de mulțimi). Ky Fan a studiat (EP) în cazul special când $A = B$ este o submulțime compactă și convexă a unui topologic spațiu vectorial Hausdorff și pentru acesta a folosit termenul "minimax inequality". La scurt timp după acest articol (în același an) Brézis, Nirenberg și Stampacchia [50] au îmbunătățit rezultatul lui Ky Fan, extinzându-l la o mulțime nu neaparat compactă automat îndeplinită atunci când mulțimea este compactă.

Rezultatele recente privind existența soluțiilor (EP) apar]n multe lucr[ri dintre care amintim [27], [28], [29], [120]. Noi condiții necesare (și în unele cazuri suficiente) pentru existența soluțiilor în cazul spațiilor infinit dimensionale au fost propuse în [83], acestea fiind ulterior simplificate și analizate mai departe în [82].

Primul concept de bază în domeniul well posedness își are originea în ideea clasică a lui J. Hadamard, formulată în 1922. Aceasta presupune existența unei soluții optimale unice, împreună cu o continuă dependență față de datele problemei.

La începutul anilor 60, A. Tikhonov a introdus un nou concept de well posedness impunând convergența tuturor șirurilor de minimizare către punctul de minim bine definit.

Fie problema de optimizare scalară (D, h)

$$\min h(a), \quad a \in D$$

unde $h : D \to \mathbb{R}$, și D este o mulțime nevidă. Problema este Tikhonov well posed dacă și numai dacă există exact o soluție $a_0 \in D$, astfel încât $h(a_0) \leq h(a)$ pentru orice $a \in D$ și

$$h(a_n) \to h(a_0)$$

implică $a_n \to a_0$.

Exemplul 0.0.1. *Fie $D = \mathbb{R}^n$ și funcția $h(a) = |a|$ (orice normă).*

Atunci $0 = \operatorname{argmin}(D, h)$ și este evident că (D, h) este Tikhonov well posed.

Exemplul 0.0.2. *Fie $D = \mathbb{R}$ și*

$$h(a) = \begin{cases} a & \text{pentru} \quad a > 0 \\ |a+1| & \text{pentru} \quad a \leq 0 \end{cases},$$

în acest caz (D, h) nu este Tikhonov well posed (spunem că problema este Tikhonov ill posed). Într-adevăr, singurul punct de minim este $a_0 = -1$, dar șirul de minimizare $a_n = 1/n$ nu converge către a_0.

Dattoro [59] spune că dualitatea este un instrument puternic și des folosit în matematica aplicată din mai multe motive. Primul motiv este că problema duală este întotdeauna convexă, chiar dacă cea primală nu este convexă. Motivul al doilea este că numărul variabilelor în problema duală este egală cu numărul constrângerilor în cea primală, iar acest număr este deseori mai mic decât numărul variabilelor în problema primală. În al treilea rând, valoarea maximă dată de problema duală este de multe ori egală cu cea minimă în cazul problemei primale.

Lucrarea de față este organizată, după cum urmează. Pentru început, reamintim câteva definiții care facilitează înțelegerea secțiunilor următoare.

Capitolul 2 se bazează pe problema de echilibru și generalizările acesteia. Prezentăm câteva rezultate de existență pentru soluțiile problemelor scalare și vectoriale de echilibru. În anii trecuți problemele vectoriale de echilibru și cele de formă multivocă au fost intens studiate (de exemplu [51], [80]). Aceste probleme pot fi formulate în felul următor: fie A o mulțime nevidă a unui topologic spațiu vectorial X, B o mulțime nevidă, Z un topologic spațiu vectorial, $C \subset Z$ un con convex și solid și $f : A \times B \to Z$ o funcție de valoare vectorială. Problema vectorială slabă de echilibru este

$$\text{găsiți } \bar{a} \in A \text{ astfel încât } f(\bar{a}, b) \notin -\operatorname{int} C \text{ pentru orice } b \in B. \qquad (2)$$

În ultima parte a capitolului extindem rezultatele problemelor vectoriale de echilibru pentru așa numitele probleme slabe de echilibru multivoc. Dacă $f : A \times B \to 2^Z$, o metodă de a defini problema slabă de echilibru multivoc este următoarea:

$$\text{găsiți } \bar{a} \in A \text{ astfel încât } f(\bar{a}, b) \nsubseteq -\operatorname{int} C \text{ pentru orice } b \in B. \qquad (3)$$

Este de reținut faptul că această problemă se reduce la o problemă slabă de echilibru multivoc. Redăm aici câteva teoreme de existență pentru problema slabă de echilibru multivoc, precum și unele consecințe ale acestor rezultat.

Capitolul 3 este dedicat calității unor probleme de echilibru de a fi well-posed. Stabilim aici o relație între Tikhonov well posedness pentru probleme de echilibru și Tikhonov well posedness pentru jocuri necooperative, apoi demonstrăm echivalența acestui tip de well posedness cu problemele de echilibru și jocurile necooperative. Folosind aceste rezultate, în partea a doua a acestui capitol deducem relația între proprietățile de diametru. Apoi, extindem câteva dintre rezultatele obținute de Bianchi, Kassay și Pini în [26] la problema vectorială tare de echilibru. De asemenea, studiem problema vectorială slabă de echilibru și enunțăm definițiile pentru B-well posedness și M-well posedness pentru cazul slab. Relația dintre aceste tipuri de well posedness este stabilită aici, apoi definim condiții suficiente pentru echivalența noțiunilor well posedness.

Ultima parte a prezentei lucrări se ocupă de aplicații. Capitolul 5 se bazează pe jocurile necooperative și cooperative. La început prezentăm binecunoscutul joc de două persoane cu suma zero și punctele șa, oferind exemple. Apoi, se arată modalitatea de a obține un joc cooperativ pornind de la un joc necooperativ (Bătălia sexelor). Secțiunea următoare prezintă jocuri precum "Economie cu moșieri și țărani, bazată pe producție" "Economie cu negustori de două tipuri, bazată pe schimb", "Aeroportul", "Falimentul", "Dezvoltarea cooperativă a resurselor de apă în Japonia", "Jocul simplu". În majoritatea acestor cazuri, elementele mulțimii de jucători sunt, așa cum le arată și denumirile, persoane reale, de exemplu moșieri și țărani, negustori, creditori sau votanți, dar mulțimea jucătorilor poate fi alcătuită și din obiective, așa cum se întâmplă în cazul aterizărilor pe aeroporturi, asociațiilor agricole sau serviciilor municipale de apă și canalizare.

În ultima secțiune deducem reprezentarea duală între funcția caracteristică și funcția indirectă a jocului cu utilități transferabile.

În final, dăm o condiție de regularitate de tip închidere care asigură maximal monotonia sumei generalizate $S + A^*TA$, utilizând operatori monotoni tare reprezentabili și arătăm că ipoteza noastră este mai slabă decât cele menționate mai sus. Dăm a aplicație utilă pentru dualitatea tare stabilă utilizând funcția $f + g \circ A$, unde f și g sunt funcții convexe, proprii și inferior semicontinue, iar A este un operator liniar și continuu. Introducem de asemenea unele formule de inf-convoluție generalizată și stabilim câteva rezultate referitoare la conjugatele lor Fenchel. În ultima parte tratăm câteva exemple în care sunt utilizate rezultatele generale pentru maximal monotonia lui $S + A^*TA$.

Contribuțiile autoarei la această teză se bazează pe cinci articole, la patru dintre acestea fiind coautoare. Unul [52], având ca subiect problema slabă de echilibru multivoc, a apărut în The Special Volume in Honour of Boris Mordukhovich, Springer Optimization and its Application în 2010, un altul [47] online în Set-Valued and Variational Analysis în 2011, iar celelalte trei [46], [45], [78] au fost trimise spre publicare la jurnale ISI.

Rezultatele noastre originale sunt formulate în următoarele definiții, teoreme, propoziții și corolare:

Capitolul 2: Lema 2.3.1, Definiția 2.3.2, Teorema 2.3.3, Corolarul 2.3.4, Corolarul 2.3.5.

Capitolul 3: Teorema 3.1.9, Teorema 3.1.20, Propoziția 3.2.11, Propoziția 3.2.12, Definiția 3.2.13, Definiția 3.2.14, Observația 3.2.15, Definiția 3.2.16, Propoziția 3.2.17, Propoziția 3.2.18.

Capitolul 4: Observația 4.5.5, Teorema 4.5.7, Corolarul 4.5.8, Teorema 4.5.10, Corolarul 4.5.11, Teorema 4.5.13, Corolarul 4.5.14, Teorema 4.5.15, Corolarul 4.5.16, Teorema 4.5.17, Observația 4.5.18, Observația 4.5.19, Observația 4.5.20, Observația 4.5.21.

Capitolul 5: Teorema 5.2.1, Observația 5.2.3, Teorema 5.2.4, Observația 5.2.5, Corolarul 5.2.6, Corolarul 5.2.7, Teorema 5.2.8, Observația 5.2.9, Corolarul 5.2.10, Teorema 5.3.1, Teorema 5.3.3, Corolarul 5.4.1, Corolarul 5.4.2, Corolarul 5.4.3, Corolarul 5.4.4.

Mulțumiri

În primul rând doresc să-mi exprim recunoștința față de Prof. Dr. Kassay Gábor, conducătorul meu de doctorat. Sunt recunoscătoare pentru șansa de a fi făcut studiile doctorale sub îndrumarea sa, îi mulțumesc pentru ajutorul acordat, supravegherea și asistența sa constantă în studiile și cercetările mele. Țin să-i mulțumesc pentru răbdarea, cuvintele motivatoare, entuziasmul și vastele sale cunoștințe de care am beneficiat în ultimii trei ani. Mă simt privilegiată că pot participa în proiectul său CNCS, cod PN-II-ID-PCE-2011-3-0024.

Doresc să mulțumesc, de asemenea, Prof. Dr. Marc Uetz de la University of Twente pentru posibilitatea de a lucra în grupul sau de cercetare pe perioada mobilității și Dr. Theo Driessen pentru îndrumarea sa și conversațiile fructuoase purtate la Enschede.

Adresez multe mulțumiri Facultății de Matematică și Informatică a Universității Babeș-Bolyai pentru asigurarea unui mediu propice activităților de cercetare și Institutului pentru Studii Doctorale pentru suportul financiar acordat prin proiectul POSDRU Studii doctorale: prin știință spre societate (POSDRU 6/1.5/S/3).

Sunt recunoscătoare pentru prietenia Dr. Szilárd Csaba László. Atât cooperarea noastră, cât și sfaturile sale au adus o contribuție semnificativă la munca mea, sper să putem lucra împreună și în viitor.

Nu în ultimul rând, sincere mulțumiri sunt adresate familiei mele pentru înțelegerea, încurajările, suportul moral și dragostea sa.

Cuvinte cheie: problema slabă multivocă de echilibru, tikhonov well posedness, B-well posedness, M-well posedness, problema vectorială slabă de echilibru, jocuri necooperative, jocuri cooperative, funcția caracteristică, funcția indirectă, joculuri cu utilități transferabile, operatori monotoni, operatori reprezentabile, funcția de reprezentare.

Capitolul 1

Noțiuni și rezultate preliminare

Acest capitol conține noțiunile matematice utilizate pe parcursul prezentei teze de doctorat. Atât definițiile conceptelor folosite des în domeniul nostru, cât și observațiile, respectiv propozițiile aferente acestor concepte sunt date în această secțiune.

Capitolul 2

Problema de echilibru

2.1 Problema scalară de echilibru

Fie A și B două mulțimi nevide. Fiind dată o bifuncție $\varphi : A \times B \to \mathbb{R}$, problema echilibrului este următoarea:

$$(EP) \qquad \text{găsiți } \bar{a} \in A \text{ astfel încât } \varphi(\bar{a}, b) \geq 0 \text{ pentru orice } \; b \in B.$$

În cele ce urmează, prezentăm câteva rezultate de existență pentru problema de echilibru (EP). Kassay și Kolumbán prezintă un rezultat de existență general [89].

Teorema 2.1.3. *Fie A un topologic spațiu compact, B o mulțime nevidă și fie dată funcția $f : A \times B \to \mathbb{R}$ astfel încât*

(i) *pentru fiecare $b \in B$, funcția $\varphi : A \to \mathbb{R}$ este semicontinuă superior;*

(ii) *pentru fiecare $a_1, ..., a_m \in A$, $b_1, ..., b_k \in B$, $\lambda_1, ..., \lambda_m \geq 0$ astfel încât $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, are loc inegalitatea*

$$\min_{1 \leq j \leq k} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(a_i, b_j) \leq \sup_{a \in A} \min_{1 \leq j \leq k} f(a, b_j)$$

(iii) *oricare ar fi $b_1, ..., b_k \in B$, $\mu_1, ..., \mu_k \geq 0$ astfel încât $\sum_{j=1}^{k} \mu_j = 1$, are loc*

$$\sup_{a \in A} \sum_{j=1}^{k} \mu_j f(a, b_j) \geq 0.$$

Atunci problema echilibrului (EP) admite o soluție.

2.2 Problema vectorială de echilibru

Fie $\varphi : A \times B \to Z$ o funcție dată, unde A și B sunt două mulțimi nevide, Z este un topologic spațiu vectorial ordonat parțial de conul convex $C \subseteq Z$ cu $\text{int}C \neq \emptyset$. Considerăm așa-numita *problemă vectorială de echilibru* în două feluri:

$$(VEP) \qquad \text{găsiți } \bar{a} \in A \text{ astfel încât } \varphi(\bar{a}, b) \notin -C \setminus \{0\} \quad \forall\, b \in B$$

și

$$(WVEP) \qquad \text{găsiți } \bar{a} \in A \text{ astfel încât } \varphi(\bar{a}, b) \notin -\text{int}\, C \quad \forall\, b \in B.$$

Prima problemă se numește problemă vectorială tare de echilibru, iar a doua problemă vectorială slabă de echilibru.

Fie A o submulțime nevidă a spațiului X, B o mulțime nevidă și fie $\varphi : A \times B \to Z$. Următorul rezultat oferă condiții suficiente de existență ale soluțiilor problemei (WVEP).

Teorema 2.2.4. *[51] Fie A o mulțime compactă și $\varphi : A \times B \to Z$ o funcție astfel încât:*

(i) *pentru orice $b \in B$, funcția $\varphi(\cdot, b) : A \to Z$ este semicontinuă superior pe A;*

(ii) *pentru orice $a_1, a_2, \ldots, a_m \in A$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \geq 0$ cu $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, $b_1, \ldots, b_n \in B$ există $u^* \in C^* \setminus \{0\}$ astfel încât*

$$\min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u^*(\varphi(a_i, b_i)) \leq \sup_{a \in A} \min_{1 \leq j \leq n} u^*(\varphi(a, b_j));$$

(iii) *oricare ar fi $b_1, \ldots, b_n \in B$ și $z_1^*, \ldots, z_n^* \in C^*$ nu toate nule, are loc*

$$\sup_{a \in A} \sum_{j=1}^{n} z_j^*(\varphi(a, b_j)) \geq 0.$$

Atunci problema (WVEP) *admite o soluție.*

2.3 Problema de echilibru multivoc

Fie A o submulțime nevidă a unui topologic spațiu vectorial real X, B o mulțime nevidă, Z un spațiu normat, $C \subseteq Z$ un con convex solid și $\varphi : A \times B \to 2^Z$ este o multifuncție.

Problema slabă de echilibru multivoc este:

$$(WWMEP) \qquad \text{găsiți } \bar{a} \in A \text{ astfel încât } \varphi(\bar{a}, b) \nsubseteq -\operatorname{int} C \quad \forall\, b \in B.$$

Prin $\mathcal{C}(Z)$ notăm mulțimea submulțimilor compacte ale spațiului Z.

Primul rezultat este unul tehnic, iar demonstrația sa se bazează pe teorema de separare.

Lema 2.3.5. *(A. Capătă, G. Kassay,* **B. Mosoni** *[52]) Fie următoarele condiții îndeplinite de bifuncția $\varphi : A \times B \to \mathcal{C}(Z)$*

(i) dacă familia $\{U_{b,k} \mid b \in B,\, k \in \operatorname{int} C\}$ acoperă mulțimea A, atunci ea conține o subacoperire finită, unde

$$U_{b,k} = \{a \in A | \varphi(a, b) + k \subseteq -\operatorname{int} C\};$$

(ii) oricare ar fi $a_1, \ldots, a_m \in A$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ cu $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, $b_1, \ldots, b_n \in B$, pentru orice $d_j^i \in \varphi(a_i, b_j)$ unde $i \in \{1, \ldots, m\}$ și $j \in \{1, \ldots, n\}$, există $u^* \in C^* \setminus \{0\}$ astfel încât

$$\min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u^*(d_j^i) \leq \sup_{a \in A} \min_{1 \leq j \leq n} \max u^*(\varphi(a, b_j)),$$

(iii) pentru orice $b_1, \ldots, b_n \in B$ și $z_1^*, \ldots, z_n^* \in C^*$ nu toate nule, are loc

$$\sup_{a \in A} \sum_{j=1}^{n} \max z_j^*(\varphi(a, b_j)) \geq 0.$$

Atunci problema slabă de echilibru multivoc admite o soluție.

Introducem un nou concept de convexitate pentru mulitfuncțiile de două variabile.

Definiția 2.3.6. *(A. Capătă, G. Kassay,* **B. Mosoni** *[52]) Fie $T : X \times Y \to 2^Z$ o mulifuncție, $C \subset Z$ un con convex solid. Funcția T este asemănător C-subconvexă în prima variabilă dacă, pentru orice $\theta \in \operatorname{int} C$, x_1, $x_2 \in X$ și $t \in (0, 1)$ există un $x_3 \in X$, astfel încât*

$$\theta + tT(x_1, y) + (1 - t)T(x_2, y) \subset T(x_3, y) + \operatorname{int} C \text{ pentru orice } y \in Y.$$

Spunem că T este asemănător C-subconcavă în prima variabilă dacă $-T$ este asemănător C-subconvexă în prima variabilă.

Următorul rezultat oferă condiții suficiente de existență ale soluțiilor problemei în ipoteze de convexitate și continuitate.

Teorema 2.3.7. *(A. Capătă, G. Kassay,* **B. Mosoni** *[52]) Fie A o mulțime compactă și fie îndeplinite următoarele condiții de bifuncția $\varphi : A \times B \to \mathcal{C}(Z)$:*
(i) $\varphi(\cdot, b)$ este $-C$-continuă superior pentru orice $b \in B$;
(ii) φ este asemănător C-subconcavă în prima variabilă;
(iii) pentru orice $b_1, \ldots, b_n \in B$ și $z_1^*, \ldots, z_n^* \in C^*$ nu toate nule

$$\sup_{a \in A} \sum_{j=1}^{n} max\, z_j^*(\varphi(a, b_j)) \geq 0.$$

Atunci problema slabă de echilibru multivoc admite o soluție.

Considerăm un caz particular al problemei: $Z = \mathbb{R}$ și $C = \mathbb{R}_+$. Atunci $\varphi : A \times A \to 2^{\mathbb{R}}$ și $(WWMEP)$ devine:

$$(MEP) \text{ găsiți } \bar{a} \in A \text{ astfel încât } \varphi(\bar{a}, b) \nsubseteq -\operatorname{int} \mathbb{R}_+ \quad \forall\, b \in A.$$

Pentru acest caz particular obținem următorul rezultat:

Corolarul 2.3.8. *(A. Capătă, G. Kassay,* **B. Mosoni** *[52]) Fie $\varphi : A \times B \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$ o funcție multivocă, astfel încât următoarele condiții să fie satisfăcute:*
(i) dacă familia $\{U_{b,k} \mid b \in B,\, k > 0\}$ acoperă mulțimea A, atunci ea conține o subacoperire finită unde

$$U_{b,k} = \{a \in A | \varphi(a, b) + k \subseteq -\operatorname{int} \mathbb{R}_+\};$$

(ii) pentru orice $a_1, \ldots, a_m \in A$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ cu $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, $b_1, \ldots, b_n \in B$, pentru orice $d_j^i \in \varphi(a_i, b_j)$ unde $i \in \{1, \ldots, m\}$ și $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$\min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i d_j^i \leq \sup_{a \in A} \min_{1 \leq j \leq n} \max \varphi(a, b_j);$$

(iii) pentru orice $b_1, \ldots, b_n \in B$ și $z_1^*, \ldots, z_n^* \geq 0$ nu toate nule are loc

$$\sup_{a \in A} \sum_{j=1}^{n} \max z_j^*(\varphi(a, b_j)) \geq 0.$$

Atunci problema (MEP) admite o soluție.

Corolarul 2.3.9. *(A. Capătă, G. Kassay,* **B. Mosoni** *[52]) Fie A o mulțime compactă și $\varphi : A \times B \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$ o funcție astfel încât*
(i) $\varphi(\cdot, b)$ este $-\mathbb{R}_+$-continuă superior pentru orice $b \in B$;
(ii) φ este asemănător $\mathbb{R}_+$-subconcavă în prima variabilă;

(iii) pentru orice $b_1, \ldots, b_n \in B$ și $z_1^*, \ldots, z_n^* \geq 0$ nu toate nule are loc

$$\sup_{a \in A} \sum_{j=1}^{n} max\, z_j^*(\varphi(a, b_j)) \geq 0.$$

Atunci problema (MEP) admite o soluție.

Fie A o submulțime nevidă închisă și convexă a unui spațiu real local convex și presupunem că $\varphi(a, b)$ o submulțime compactă a spațiului $\mathbb{R}$ pentru orice $a, b \in A$. Observăm că problema (MEP) este echivalentă cu următoarea problemă:

$$\text{găsiți } \bar{a} \in A \text{ astfel încât } \max \varphi(\bar{a}, b) \geq 0 \;\; \text{pentru orice } b \in A,$$

cu alte cuvinte

$$(EP) \text{ găsiți } \bar{a} \in A \text{ astfel încât } \psi(\bar{a}, b) \geq 0 \;\; \text{pentru orice } b \in A,$$

unde $\psi : X \times X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, cu $A \times A \subseteq \operatorname{dom} f$ este funcția dată de $\psi(a, b) = \max \varphi(a, b)$ pentru orice $a, b \in A$. Presupunem că $\max \varphi(a, a) = 0$ oricare ar fi $a \in A$. Fie $a \in X$. Conform [4], (EP) poate fi redusă la problema de optimizare

$$P(a) \qquad \inf_{b \in A} \psi(a, b).$$

Este simplu de verificat că $\bar{a} \in A$ este o soluție a problemei de echilibru (EP) dacă și numai dacă este o soluție pentru $P(\bar{a})$.

Capitolul 3

Problema de echilibru well posed

3.1 Tikhonov well posedness

Fie D o mulțime nevidă și fie $F : D \times D \to \mathbb{R}$ o funcție. Atunci problemă de echilibru constă în găsirea unui element $a \in D$ astfel încât

$$F(\bar{a}, b) \geq 0, \text{ oricare ar fi } b \in D. \tag{1}$$

În cele ce urmează funcția F este dată astfel încât $F(a, a) = 0$ pentru orice $a \in D$.

Fie funcția gap $G : D \to [-\infty, +\infty)$ definită prin

$$G(a) = \inf_{b \in D} F(a, b),$$

care este nepozitivă pe mulțimea D, și $G(\bar{a}) = 0$ dacă și numai dacă $\bar{a}$ este o soluție a problemei de echilibru.

Definiția 3.1.1. *[25] Problema de echilibru este Tikhonov well posed dacă*
(i) există o singură soluție $a \in D$ pentru EP,
(ii) pentru orice șir $\{a_n\} \subset D$ astfel încât $G(a_n) \to 0$, este $a_n \to a$.

Definiția 3.1.2. *Jocul necooperativ $G = (X, Y, f, g)$ este Tikhonov well posed dacă*
(i) există un singur echilibru Nash $(\bar{x}, \bar{y})$ și
(ii) orice echilibru Nash asimptotic (x_n, y_n) converge către $(\bar{x}, \bar{y})$.

Putem enunța următorul rezultat:

Teorema 3.1.3. *(***B. Burjan-Mosoni (Mosoni)** *[45]) Fie X, Y topologice spații Hausdorff și $G = (X, Y, f, g)$ jocul cu două persoane aferent, cu funcțiile utilitare reale f, g.*

Jocul G este Tikhonov well posed dacă și numai dacă problema de echilibru EP($F, X \times Y$) este de asemenea Tikhonov well posed, unde $F(a, b) = f(x, y) - f(u, y) + g(x, y) - g(x, v)$ pentru orice $a = (x, y) \in X \times Y$ and $b = (u, v) \in X \times Y$.

Relația între diametre este următoarea:

Teorema 3.1.4. *(***B. Burjan-Mosoni (Mosoni)** *[45]) Dacă există un echilibru Nash pentru jocul $G = (X, Y, f, g)$ și*

$$\lim_{\epsilon \to 0, k \to \infty} \operatorname{diam} \Omega_\epsilon^k = 0,$$

atunci

$$\operatorname{diam}(\epsilon - \operatorname{argmin}(EP)) \to 0, \ \textit{unde } \epsilon \searrow 0.$$

Mai mult, și reciproca este adevărată dacă $a \to F(a, b)$ este semicontinuă superior pentru orice $b \in D$ și oricare ar fi $\epsilon > 0$ și dacă funcțiile de profit f și g sunt mărginite superioare.

3.2 Problemă vectorială de echilibru B-well posed și M-well posed

Fie X, Y două topologice spații vectoriale și C un con închis și convex în Y cu interior nevid. Fie $f : X \times X \to Y$ o funcție cu $f(x, x) = 0$, pentru orice $x \in X$, problema vectorială slabă de echilibru este: găsiți $\bar{x} \in X$ astfel încât

$$f(\bar{x}, y) \notin -\text{int } C, \text{ pentru orice } y \in X \tag{2}$$

Introducem funcția multivocă $\Phi : X \to 2^Y$ definită prin:

$$\Phi(x) = \text{w-}\min_C(f(x, X)), \tag{3}$$

unde pentru orice $A \subset Y$, mulțimea elementelor minimal este: $\text{w-min}_C(A) = \{a' \in A : (A - a') \cap (-\text{int } C) = \emptyset\}$.

Elementul $\bar{x}$ aparține mulțimii dacă și numai dacă $0 \in \Phi(\bar{x})$, unde S este mulțimea soluțiilor și în cele ce urmează presupunem că este nevidă.

Propoziția 3.2.1. *Următoarele afirmații sunt adevărate:*

1. $\Phi(x) \cap \text{int } C = \emptyset$, *for all* $x \in X$;
2. $\bar{x} \in S \Leftrightarrow 0 \in \Phi(\bar{x})$;
3. $\bar{x} \in S \Rightarrow \Phi(\bar{x}) \cap C \neq \emptyset$;
4. $\bar{x} \in S \Leftrightarrow \Phi(\bar{x}) \cap C' \neq \emptyset$;

unde $C' = (\text{int } C) \cup \{0\}$.

Propoziția 3.2.2. *Dacă* $f(x, y) = F(y) - F(x)$, *atunci* $\{x_n\}$ *este un șir de maximizare dacă și numai dacă*
$F(x_n) \rightharpoonup_H \text{w-min}_C F(X)$.

Definiția 3.2.3. *Problema vectorială (2) este M-well-posed dacă:*
(i) există cel puțin o soluție, e.g. $S \neq \emptyset$;
(ii) pentru orice șir de maximizare și pentru orice $V_X \in \mathcal{V}_X(0)$, *există* n_0 *astfel încât* $x_n \in S + V_X$, *pentru orice* $n \geq n_0$.

Definiția 3.2.4. *Dacă* $\epsilon \in C$, *atunci mulțimea*
$S(\epsilon) = \{x \in X : \Phi(x) \cap (C - \epsilon) \neq \emptyset\}$ *este mulțimea soluțiilor* ϵ-*aproximative pentru problema (2).*

Este de notat că $S(0) = S$.

Observație 3.2.5. *Putem stabili o legătură între această definiție și noțiunea de soluții ϵ-slab-minimal*

$$wQ(\epsilon) = \cup_{y \in \text{w-min}_C F(X)} \{x \in X : F(x) \in y + \epsilon - C\}.$$

În cazul problemelor vectoriale de optimizare unde $f(x, y) = F(y) - F(x)$, este ușor de remarcat că $S(\epsilon) = wQ(\epsilon)$ pentru orice $x \in X$.

Definiția 3.2.6. *Problema de echilibru vectorial (2) este B-well-posed dacă*

(i) există cel puțin o soluție, adică $S \neq \emptyset$;

(ii) proiecția $S(\cdot) : C \to 2^X$ este Hausdorff continuă superior în $\epsilon = 0$, adică pentru orice $V_X \in \mathcal{V}_X(0)$ există $V_Y \in \mathcal{V}_Y(0)$ astfel încât $S(\epsilon) \subset S + V_X$ pentru orice $\epsilon \in V_Y \cap C$.

Propoziția 3.2.7. *Orice problemă slabă de echilibru vectorial B-well-posed este în același timp și M-well-posed.*

Propoziția 3.2.8. *Presupunem că problema slabă de echilibru vectorial este M-well-posed și pentru orice $V_Y \in \mathcal{V}_Y(0)$ există $\tilde{V}_Y \in \mathcal{V}_Y(0)$ astfel încât*

$$\Phi(X \backslash cl(S)) \cap (C + \tilde{V}_Y) \subseteq V_Y.$$

Atunci problema este B-well-posed.

Capitolul 4

Jocuri necooperative și cooperative

4.1 Jocuri necooperative de două persoane cu suma zero și punctele șa

Punctele șa (teorema minimax)

Fie X, Y două mulțimi nevide și $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ o funcție dată. Perechea $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ este un punct șa pentru funcția h pe mulțimea $X \times Y$ dacă

$$h(x, \bar{y}) \leq h(\bar{x}, \bar{y}) \leq h(\bar{x}, y), \ \forall (x, y) \in X \times Y. \tag{1}$$

Fie $A = B = X \times Y$ și fie funcția $f : A \times B \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(a, b) := h(x, v) - h(u, y), \ \forall a = (x, y), \, b = (u, v). \tag{2}$$

Atunci orice soluție a problemei (EP) este punct șa pentru funcția h, și vice-versa.

Punctul șa poate fi caracterizat în felul următor. Presupunem că pentru orice $x \in X$ există $\min_{y \in Y} h(x, y)$, și pentru orice $y \in Y$ există $\max_{x \in X} h(x, y)$. Atunci are loc propoziția următoare.

Propoziția 4.1.9. *Funcția f admite un punct șa pe mulțimea $X \times Y$ dacă și numai dacă există* $\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y)$ *și* $\min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y)$ *și sunt egale.*

În această secțiune enumerăm următoarele exemple:

Jocuri de două persoane cu suma zero

Dualitate în optimizare

Această problemă generală are multe cazuri particulare importante, de exemplu: *problema de optimizare cu restricții de inegalitate și de egalitate, problema de programare liniară, problema de programare conică.*

4.2 Exemple de jocuri necooperative

Pentru a sublinia importanța (EP), prezentăm în această secțiune câteva dintre cazurile sale particulare, intens studiate în literatura de specialitate. Cele mai multe modelează probleme reale ale vieții, având originiea în mecanică, economie, biologie, etc.

Problema de minimizare convexă
Problema punctului fix
Problema complementarității
Problema de echilibru Nash la jocuri necooperative
Problema de minimizare vectorială

4.3 Jocuri cooperative obținute din jocuri necooperative

Să ne amintim jocul "Bătălia sexelor" pentru care strategiile sunt date. Matricea aferentă este:

$$L := \begin{pmatrix} (1,4) & (0,0) \\ (0,0) & (4,1) \end{pmatrix}$$

Definiția 4.3.10. *Fie G_2 un joc de două persoane (necooperativ) cu mulțimi finite ale strategiilor S_1 și S_2 și fie operatorul $L = (L_1, L_2)$. Astfel, operatorul jocului cooperativ corespunzător acestuia este:*

$$\hat{L} : \Delta^{S_1 \times S_2} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$\sum_{i,j} \lambda_{ij}(s_i, \tilde{s}_j) \mapsto \sum_{i,j} \lambda_{ij} L(s_i, \tilde{s}_j)$$

unde $\Delta^{S_1 \times S_2} = \{\sum_{i,j} \lambda_{ij}(s_i, \tilde{s_j}) | \sum_{i,j} \lambda_{ij} = 1, \lambda_{ij} \in [0,1]\}$ este simplexul construit pe perechile de strategii pure $(s_i, \tilde{s}_j)$.

Definiția 4.3.11. *Fie G_2 un joc de două persoane și operatorul $\hat{L}$ jocului cooperativ corespunzător. Perechea de pierderi $(u, v) \in \mathrm{im}(\hat{L})$ este pereche subdominată de $(u', v') \in \mathrm{im}(\hat{L})$ dacă $u' \leq u$ și $v' \leq v$ și $(u', v') \neq (u, v)$. Perechea (u, v) este Pareto optimală dacă nu este pereche subdominată.*

Definiția 4.3.12. *Fie G_2 un joc de două persoane și operatorul $\hat{L}$ jocului cooperativ corespunzător. Mulțimea*

$$B := \{(u, v) \in \mathrm{im}(L) | u \leq u^*, v \leq v^* \text{ și } (u, v) \text{ Pareto optimală } \}$$

este mulțimea de negociere.

4.4 Jocuri cooperative în formă de funcție caracteristică

Definiția 4.4.13. *Fie $n \in \mathbb{N}$. Jocul cooperativ de n-persoane în formă de funcție caracteristică este perechea (N, v), unde N este o mulțime de n elemente și $v : 2^N \to \mathbb{R}$ este o funcție pe mulțimea 2^N și pentru care $v(\emptyset) = 0$.*

Elementele mulțimii N sunt numite jucători, iar funcția relevantă v funcția caracteristică a jocului. O submulțime S din mulțimea de jucători N ($S \subset N$) se numește coaliție, iar $v(S)$ valoarea (puterea) coaliției S în joc. În multe cazuri, elementele din mulțimea de jucători N reprezintă clase sociale reale, de exemplu proprietari de terenuri agricole și țărani, negustori, creditori sau votanți, dar mulțimea de jucători poate fi alcătuită din obiectivele binecunoscutelor cazuri TVA, pistele aeroporturilor, asociații agricole sau serviciile municipale de apă și canalizare.

4.5 Reprezentarea duală între funcția caracteristică și funcția indirectă a jocului UT

Stabilim mulțimea de jucători N și mulțimea $\mathcal{P}(N) = \{S | S \subseteq N\}$ alcătuită din submulțimile lui N (inclusiv mulțimea vidă $\emptyset$). Un joc cooperativ cu utilități transferabile este definit prin așa numita funcție caracteristică $v : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}$ pentru care $v(\emptyset) = 0$. Așadar, jocul UT alocă fiecărei coaliții $S \subseteq N$ valoarea (puterea) $v(S)$ însumând beneficiile (monetare) realizate prin cooperarea membriilor lui S.

Definiția 4.5.14. *([100], pagina 292) Pentru orice joc UT de n-persoane și $v : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}$, considerăm* funcția indirectă $\pi^v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, *definită prin*

$$\pi^v(\vec{y}) = \max_{S \subseteq N} \{v(S) - \sum_{k \in S} y_k\} \text{ pentru oricare } \vec{y} = (y_k)_{k \in N} \in \mathbb{R}^N, \tag{3}$$

unde, pentru orice $S \subseteq N$ (inclusiv mulțimea vidă, $\emptyset$), excesul $e^v(S, \vec{y}) = v(S) - \sum_{k \in S} y_k$.

Observație 4.5.15. *(D. Hou, T.S.H. Driessen, A. Meseguer-Artola,* **B. Mosoni** *[78]) Fie* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *o submulțime și fie funcția* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ *Atunci funcția conjugată Fenchel-Moreau* $f_X^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ *este definită prin*

$$f_X^*(\vec{y}) = sup[< \vec{y}, \vec{x} > -f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in X] \quad \textit{pentru orice } \vec{y} \in \mathbb{R}^n.$$

În contextul unui joc UT de n-persoane $v : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}$ *cu* $v(\emptyset) = 0$, *fie* $X = \{-1_S \in \mathbb{R}^n \mid S \subseteq N\}$ *și funcția* $f^v : X \to \mathbb{R}$ *definită de* $f^v(\vec{x}) = -v(S)$ *pentru orice* $\vec{x} = -1_S$, *conjugata Fenchel-Moreau* $f_{v,X}^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *corespunde cu funcția indirectă* π^v *definită prin (3).*

Teorema 4.5.16. *(D. Hou, T.S.H. Driessen, A. Meseguer-Artola,* **B. Mosoni** *[78]) Fie jocul UT de n-persoane* $v : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}$ *1-convex. Atunci funcția indirectă* $\pi^v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *satisface proprietățile următoare:*

(i) $\pi^v(\vec{y}) = \max[0, \quad v(N) - \sum_{k \in N} y_k]$ *pentru orice* $\vec{y} = (y_k)_{k\in N} \in \mathbb{R}^N$ *cu* $y_i \leq b_i^v$ *oricare ar fi* $i \in N$.

(ii)

$$\begin{aligned} \pi^v(\vec{y}) &= \max[0, \quad v(N \backslash \{\ell\}) - \sum_{k \in N \backslash \{\ell\}} y_k] \\ &= \max[0, \quad v(N) - \sum_{k \in N} y_k + y_\ell - b_\ell^v] \end{aligned}$$

pentru orice $\vec{y} = (y_k)_{k\in N} \in \mathbb{R}^N$ *astfel încât există unicul* $\ell \in N$ *cu* $y_\ell > b_\ell^v$ *și* $y_i \leq b_i^v$ *pentru orice* $i \in N$, $i \neq \ell$.

Corolarul 4.5.17. *(D. Hou, T.S.H. Driessen, A. Meseguer-Artola,* **B. Mosoni** *[78]) Oricare ar fi jocul UT de n-persoane 1-convex cu funcția* $v : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}$, *următoarele trei afirmații sunt echivalente (*$\vec{y} = (y_k)_{k\in N} \in \mathbb{R}^N$*)*

(i) $\vec{y} \in Core(v)$, *adică* $\vec{y}(N) = v(N)$ *și* $\vec{y}(S) \geq v(S)$ *pentru orice* $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$

(ii) $\vec{y}(N) = v(N)$ *și* $\pi^v(\vec{y}) = 0$

(iii) $\vec{y}(N) = v(N)$ *și* $\vec{y} \leq \vec{b}^v$, *i.e.,* $y_i \leq b_i^v$ *pentru orice* $i \in N$

În cele ce urmează înlocuim 1-convexitatea cu 2-convexitatea în jocul de n-persoane.

Teorema 4.5.18. *(D. Hou, T.S.H. Driessen, A. Meseguer-Artola,* **B. Mosoni** *[78]) Fie jocul UT de n-persoane $v : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}$ 2-convex. Atunci, funcția indirectă $\pi^v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisface proprietățile următoare:*

(i) $\pi^v(\vec{y}) = \max[0, \quad v(N) - \sum_{k\in N} y_k, \quad (v(\{i\}) - y_i)_{i\in N}]$ *pentru orice* $\vec{y} \in \mathbb{R}^N$ *cu* $\vec{y} \le \vec{b}^v$.

(ii) $\pi^v(\vec{y}) = \max[0, \quad v(N\backslash\{\ell\}) - \sum_{k\in N\backslash\{\ell\}} y_k] = \max[0, \quad v(N) - \sum_{k\in N} y_k + y_\ell - b_\ell^v]$ *pentru orice* $\vec{y} = (y_k)_{k\in N} \in \mathbb{R}^N$ *astfel încât există un singur element* $\ell \in N$ *cu* $y_\ell > b_\ell^v \ge v(\{\ell\})$ *și* $v(\{i\}) \le y_i \le b_i^v$ *pentru orice* $i \in N$, $i \ne \ell$.

(iii) $\pi^v(\vec{y}) = \max[v(N) - \sum_{k\in N} y_k, \quad v(\{j\}) - y_j]$ *pentru orice* $\vec{y} = (y_k)_{k\in N} \in \mathbb{R}^N$ *astfel încât există un singur element* $j \in N$ *cu* $y_j < v(\{j\}) \le b_j^v$ *și* $v(\{i\}) \le y_i \le b_i^v$ *pentru orice* $i \in N$, $i \ne j$.

(iv) $\pi^v(\vec{y}) = \max[v(N\backslash\{\ell\}) - \sum_{k\in N\backslash\{\ell\}} y_k, \quad v(\{j\}) - y_j] = \max[v(N) - \sum_{k\in N} y_k + y_\ell - b_\ell^v, \quad v(\{j\}) - y_j]$ *pentru orice* $\vec{y} = (y_k)_{k\in N} \in \mathbb{R}^N$ *astfel încât există un singur* $j, \ell \in N$ *cu* $y_\ell > b_\ell^v \ge v(\{\ell\})$, $y_i \le b_i^v$ *pentru orice* $i \in N$, $i \ne \ell$, *și* $y_j < v(\{j\}) \le b_j^v$, $y_i \ge v(\{i\})$ *pentru orice* $i \in N$, $i \ne j$.

Corolarul 4.5.19. *(D. Hou, T.S.H. Driessen, A. Meseguer-Artola,* **B. Mosoni** *[78]) Oricare ar fi jocul UT de n-persoane 2-convex cu funcția $v : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}$, următoarele trei afirmații sunt echivalente ($\vec{y} = (y_k)_{k\in N} \in \mathbb{R}^N$)*

(i) $\vec{y} \in Core(v)$, *i.e.*, $\vec{y}(N) = v(N)$ *și* $\vec{y}(S) \ge v(S)$ *pentru orice* $S \subseteq N$, $S \ne \emptyset$

(ii) $\vec{y}(N) = v(N)$ *și* $\pi^v(\vec{y}) = 0$

(iii) $\vec{y}(N) = v(N)$ *și* $v(\{i\}) \le y_i \le b_i^v$ *pentru orice* $i \in N$

Teorema 4.5.20. *(D. Hou, T.S.H. Driessen, A. Meseguer-Artola,* **B. Mosoni** *[78]) Fie jocul UT de n-persoane cu funcția $v : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}$ un joc big boss, unde jucătorul 1 este big boss-ul. Atunci, funcția indirectă $\pi^v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisface proprietățile următoare:*

(i) $\pi^v(\vec{y}) = \max[0, \quad v(N) - \sum_{k\in N} y_k]$ *pentru orice* $\vec{y} = (y_k)_{k\in N} \in \mathbb{R}^N$ *cu* $0 \le y_i \le b_i^v$ *pentru orice* $i \in N\backslash\{1\}$.

(ii) $\pi^v(\vec{y}) = \max[0, \quad v(N\backslash\{\ell\}) - \sum\limits_{k\in N\backslash\{\ell\}} y_k] = \max[0, \quad v(N) - \sum\limits_{k\in N} y_k + y_\ell - b_\ell^v]$ *pentru orice* $\vec{y} = (y_k)_{k\in N} \in \mathbb{R}^N$ *astfel încât există un singur* $\ell \in N\backslash\{1\}$ *cu* $y_\ell > b_\ell^v \geq 0$ *și* $0 \leq y_i \leq b_i^v$ *pentru orice* $i \in N\backslash\{1, \ell\}$.

(iii) $\pi^v(\vec{y}) = \max[-y_\ell, \quad v(N) - \sum\limits_{k\in N} y_k]$ *pentru orice* $\vec{y} = (y_k)_{k\in N} \in \mathbb{R}^N$ *astfel încât există un singur* $\ell \in N\backslash\{1\}$ *cu* $y_\ell < 0 \leq b_\ell^v$ *și* $0 \leq y_i \leq b_i^v$ *pentru* $i \in N\backslash\{1, \ell\}$.

(iv) $\pi^v(\vec{y}) = \max[-y_j, \quad v(N\backslash\{\ell\}) - \sum\limits_{k\in N\backslash\{\ell\}} y_k] = \max[-y_j, \quad v(N) - \sum\limits_{k\in N} y_k + y_\ell - b_\ell^v]$ *pentru orice* $\vec{y} = (y_k)_{k\in N} \in \mathbb{R}^N$ *astfel încât există un singur* $j, \ell \in N\backslash\{1\}$ *cu* $y_\ell > b_\ell^v \geq 0$, $y_j < 0 \leq b_j^v$, *și* $0 \leq y_i \leq b_i^v$ *pentru orice* $i \in N\backslash\{1, j, \ell\}$.

Corolarul 4.5.21. *(D. Hou, T.S.H. Driessen, A. Meseguer-Artola,* **B. Mosoni** *[78]) Pentru orice joc big boss cu funcția* $v : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}$, *unde jucătorul* 1 *este big boss-ul, următoarele trei afirmații sunt echivalente* ($\vec{y} = (y_k)_{k\in N} \in \mathbb{R}^N$)

(i) $\vec{y} \in Core(v)$, *i.e.,* $\vec{y}(N) = v(N)$ *și* $\vec{y}(S) \geq v(S)$ *pentru orice* $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$

(ii) $\vec{y}(N) = v(N)$ *și* $\pi^v(\vec{y}) = 0$

(iii) $\vec{y}(N) = v(N)$ *și* $0 \leq y_i \leq b_i^v$ *pentru orice* $i \in N\backslash\{1\}$

Teorema 4.5.22. *(D. Hou, T.S.H. Driessen, A. Meseguer-Artola,* **B. Mosoni** *[78]) Fie jocul UT de n-persoane cu funcția* $v : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}$ *un joc clan, coaliția* $T \subseteq N$ *cu cel puțin doi jucători este clanul. Atunci, funcția indirectă* $\pi^v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *satisface proprietățile următoare:*

(i) $\pi^v(\vec{y}) = \max[0, \quad v(N) - \sum\limits_{k\in N} y_k]$ *pentru orice* $\vec{y} = (y_k)_{k\in N} \in \mathbb{R}^N$ *cu* $y_i \geq 0$ *pentru orice* $i \in N$ *și* $y_i \leq b_i^v$ *pentru orice* $i \in N\backslash T$.

(ii) $\pi^v(\vec{y}) = \max[0, \quad v(N\backslash\{\ell\}) - \sum\limits_{k\in N\backslash\{\ell\}} y_k] = \max[0, \quad v(N) - \sum\limits_{k\in N} y_k + y_\ell - b_\ell^v]$ *pentru orice* $\vec{y} = (y_k)_{k\in N} \in \mathbb{R}^N$ *astfel încât există un singur* $\ell \in N\backslash T$ *cu* $y_\ell > b_\ell^v \geq 0$, $y_i \leq b_i^v$ *pentru orice* $i \in N\backslash T$, $i \neq \ell$, *și* $y_i \geq 0$ *pentru orice* $i \in N$.

(iii) $\pi^v(\vec{y}) = \max[-y_\ell, \quad v(N) - \sum\limits_{k\in N} y_k]$ *pentru orice* $\vec{y} = (y_k)_{k\in N} \in \mathbb{R}^N$ *astfel încât există un singur* $\ell \in N$ *cu* $y_\ell < 0$, $y_i \geq 0$ *pentru orice* $i \in N\backslash\{\ell\}$, *și* $y_i \leq b_i^v$ *pentru orice* $i \in N\backslash T$.

(iv) $\pi^v(\vec{y}) = \max[-y_j,\quad v(N\backslash\{\ell\}) - \sum_{k\in N\backslash\{\ell\}} y_k] = \max[-y_j,\quad v(N) - \sum_{k\in N} y_k + y_\ell - b_\ell^v]$ *pentru orice* $\vec{y} = (y_k)_{k\in N} \in \mathbb{R}^N$ *astfel încât există un singur* $j \in N$, $\ell \in N\backslash T$ *cu* $y_j < 0$, $y_i \geq 0$ *pentru orice* $i \in N\backslash\{j\}$, *și* $y_\ell > b_\ell^v \geq 0$, $y_i \leq b_i^v$ *pentru orice* $i \in N\backslash T$, $i \neq \ell$.

Corolarul 4.5.23. *(D. Hou, T.S.H. Driessen, A. Meseguer-Artola,* **B. Mosoni** *[78]) Pentru fiecare joc clan cu proprietățile numite, următoarele afirmații sunt echivalente:*

(i) $\vec{y} \in Core(v)$, *i.e.,* $\vec{y}(N) = v(N)$ *și* $\vec{y}(S) \geq v(S)$ *pentru orice* $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$

(ii) $\vec{y}(N) = v(N)$ *și* $\pi^v(\vec{y}) = 0$

(iii) $\vec{y}(N) = v(N)$ *și* $y_i \geq 0$ *pentru orice* $i \in N$ *și* $y_i \leq b_i^v$ *pentru orice* $i \in N\backslash T$

În cele ce urmează dăm caracterizarea geometrică a jocului clan când coaliția $T \subseteq N$ este clanul.

Teorema 4.5.24. *(D. Hou, T.S.H. Driessen, A. Meseguer-Artola,* **B. Mosoni** *[78]) Fie* $v : \mathcal{P}(N) \to \mathbb{R}$ *un joc UT de n-persoane și* $\vec{x} = (x_k)_{k\in N} \in \mathbb{R}^N$ *satisface proprietatea de eficiență* $\vec{x}(N) = v(N)$.

(i) Pentru orice pereche de jucători $i, j \in N$, $i \neq j$, *funcția indirectă* $\pi^v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *satisface* $\pi^v(\vec{x}^{ij\delta}) = s_{ij}^v(\vec{x}) + \delta$, *dacă* $\delta \geq 0$ *este suficient de mare.*

(ii) $\vec{x} \in \mathcal{K}^*(v)$ *dacă și numai dacă pentru orice pereche de jucători* $i, j \in N$, $i \neq j$, *funcția indirectă satisface* $\pi^v(\vec{x}^{ij\delta}) = \pi^v(\vec{x}^{ji\delta})$ *pentru* δ *suficient de mare.*

Capitolul 5

Maximal monotonia sumei generalizate a doi operatori maximal monotoni

În cele ce urmează X și Y să fie spații Banach și notăm cu X^*, Y^* dualele acestora. Fie $S : X \to 2^{X^*}$, $T : Y \to 2^{Y^*}$ doi operatori monotoni. Mai mult, considerăm operatorul $A : X \to Y$ liniar și continuu și notăm cu A^* operatorul adjunct a lui A. Reamintim că suma generalizată (vezi [130]), operatorilor monotoni S, și T este definită în modul următor:

$$M : X \to 2^{X^*},\ M(x) = (S + A^*TA)(x).$$

Evident, dacă $X = Y$ și $A \equiv id_X$, suma va fi suma operatorilor monotoni, aceasta însemnând că

$$M : X \to 2^{X^*},\ M(x) := (S + T)(x),$$

iar dacă $S(x) = 0$ pentru orice $x \in X$, obținem operatorul de compunere

$$M : X \to 2^{X^*},\ M(x) = A^*TA(x).$$

5.1 Operatori și funcții reprezentative maximal monotoni

Reamintim aici noțiunile și teoremele ce urmează să fie folosite în următoarea secțiune. În cele ce urmează considerăm X spațiul Banach netrivial, X^* spațiul dual și X^{**} spațiul bidual. Un operator multivoc $S : X \to 2^{X^*}$ este monoton dacă

$$\langle y^* - x^*, y - x\rangle \geq 0,\ \text{când } y^* \in S(y) \text{ și } x^* \in S(x).$$

Operatorul monoton S este maximal monoton, dacă graficul lui S,

$$G(S) = \{(x, x^*) : x^* \in S(x)\} \subseteq X \times X^*$$

nu este inclus în întregime în graficul vreunui operator monoton $S' : X \to 2^{X^*}$. Pentru S luăm în considerare *domeniul* $D(S) = \{x \in X : S(x) \neq \emptyset\} = pr_X(G(S))$ și *raza* $R(S) = \cup_{x \in X} S(x) = pr_{X^*}(G(S))$ a acestuia.

5.2 Dualitatea tare stabilă și infimal convoluții generalizate

Fie X și Y spații reale local convexe separate și dualele X^* și Y^*.

Teorema 5.2.25. *(***B. Burjan-Mosoni (Mosoni)***, S. László [47]) Fie $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ și $g : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ funcții convexe, proprii și inferior semicontinui și $A : X \to Y$ un operator liniar și continuu, iar $A^* : Y^* \to X^*$ operatorul adjunct al lui A. Presupunem că $dom(f) \cap A^{-1}(dom(g)) \neq \emptyset$.*

(a) Fie U o submulțime nevidă a lui X^*. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) $\sup_{x \in X}\{\langle x^*, x\rangle - (f + g \circ A)(x)\} = \min_{y^* \in Y^*}\{f^*(x^* - A^*y^*) + g^*(y^*)\}$ *pentru orice $x^* \in U$.*

(ii) Mulțimea $\{(x^* + A^*y^*, r) : f^*(x^*) + g^*(y^*) \leq r\}$ este închisă cu privire la mulțimea $U \times \mathbb{R}$ în topologia $(X^*, w^*) \times \mathbb{R}$.

(b) Dacă X și Y sunt spații Fréchet și

$$0 \in {}^{ic}(dom(g) - A(dom(f))),$$

atunci afirmațiile (i) și (ii) sunt valabile pentru orice $U \subseteq X^*$.

Observație 5.2.26. (**B. Burjan-Mosoni (Mosoni)**, S. László [47])Se observă că dacă X și Y sunt spații Fréchet atunci condiția că mulțimea $\{(x^* + A^*y^*, r) : f^*(x^*) + g^*(y^*) \leq r\}$ este închisă în topologia $(X^*, w^*) \times \mathbb{R}$ este mai slabă decât condiția $0 \in {}^{ic}(dom(g) - A(dom(f)))$.

Teorema 5.2.27. *(***B. Burjan-Mosoni (Mosoni)***, S. László [47]) Presupunem că $A(pr_X(dom(f))) \cap (pr_Y(dom(g))) \neq \emptyset$.*

a) Afirmațiile următoare sunt echivalente:

(i) Mulțimea $\{(x^* + A^*y^*, x^{**}, y^{**}, r) : f^*(x^*, x^{**}) + g^*(y^*, y^{**}) \leq r\}$ este închisă cu privire la mulțimea $X^* \times \Delta_{X^{**}}^{A^{**}} \times \mathbb{R}$ în topologia $(X^*, w^*) \times (X^{**}, w^*) \times (Y^{**}, w^*) \times \mathbb{R}$, unde $\Delta_{X^{**}}^{A^{**}} = \{(x^{**}, A^{**}x^{**}) : x^{**} \in X^{**}\}$.

(ii) $(f\triangle_2^A g)^*(x^*,x^{**}) = (f^*\triangle_1^A g^*)(x^*,x^{**})$ *și* $f^*\triangle_1^A g^*$ *este exactă (infimumul din definiția funcției* $f^*\triangle_1^A g^*$ *este atins) pentru orice* $(x^*,x^{**}) \in X^* \times X^{**}$.

b) Dacă

$$0 \in {}^{ic}(pr_Y dom(g) - A(pr_X dom(f)))$$

atunci afirmațiile (i) și (ii) sunt adevărate.

Observație 5.2.28. *(***B. Burjan-Mosoni (Mosoni)***, S. László [47])*

Considerăm ipoteza Teoremei 5.2.27 și respectând notațiile folosite în demostrație, avem

$${}^{ic}(dom(G) - N(dom(F))) = ri(dom(G) - N(dom(F))),$$

sau echivalent

$$\begin{aligned}&{}^{ic}(pr_Y dom(g) - A(pr_X dom(f)))\\ &= ri(pr_Y dom(g) - A(pr_X dom(f))).\end{aligned}$$

Fie X și Y spații Banach reflexive. Atunci, putem scrie Teorema 5.2.27 în forma următoare:

Corolarul 5.2.29. *(***B. Burjan-Mosoni (Mosoni), S. László [47]***)*

Considerăm funcția proprie, convexă și inferior semicontină $f : X \times X^* \to \overline{\mathbb{R}}$ și $g : Y \times Y^* \to \overline{\mathbb{R}}$. Dacă $A(pr_X(dom(f))) \cap (pr_Y(dom(g))) \neq \emptyset$ atunci următoarele condiții sunt echivalente:

(i) Mulțimea $\{(x^* + A^*y^*, x, y, r) : f^*(x^*, x) + g^*(y^*, y) \leq r\}$ este închisă cu privire la $X^* \times \Delta_X^A \times \mathbb{R}$ în topologia $(X^*, \|\cdot\|_*) \times (X, \|\cdot\|) \times (Y, \|\cdot\|) \times \mathbb{R}$, unde $\Delta_X^A = \{(x, Ax) : x \in X\}$.

(ii) $(f\triangle_2^A g)^*(x^*, x) = (f^*\triangle_1^A g^*)(x^*, x)$ și $f^*\triangle_1^A g^*$ este exactă pentru orice $(x^*, x) \in X^* \times X$.

Fie X, Y spații Banach reflexive, cu bidualele indentice cu aceleași X și Y. În cazul acesta avem $f^*\triangle_1^A g^* : X^* \times X \to \overline{\mathbb{R}}$,

$$(f^*\triangle_1^A g^*)(x^*, x) = \inf\{f^*(x^* - A^*y^*, x) + g^*(y^*, Ax) : \ y^* \in Y^*\}.$$

Teorema 5.2.30. *(***B. Burjan-Mosoni (Mosoni)***, S. László [47]) Presupunem că* $A(pr_X(dom(f^*))) \cap (pr_Y(dom(g^*))) \neq \emptyset$.

a) Afirmațiile următoare sunt echivalente:

(i) Mulțimea $\{(x^* + A^*y^*, x, y, r) : f(x, x^*) + g(y, y^*) \leq r\}$ *este închisă cu privire la* $X^* \times \Delta_X^A \times \mathbb{R}$ *în topologia* $(X^*, \|\cdot\|_*) \times (X, \|\cdot\|) \times (Y, \|\cdot\|) \times \mathbb{R}$ *unde* $\Delta_X^A = \{(x, Ax) : x \in X\}$.

(ii) $(f^*\triangle_1^A g^*)^*(x, x^*) = (f\triangle_2^A g)(x, x^*)$ *și* $(f\triangle_2^A g)$ *este exactă pentru orice* $(x, x^*) \in X \times X^*$.

b) Dacă

$$0 \in {}^{ic}(pr_Y dom(g^*) - A(pr_X dom(f^*)))$$

atunci afirmațiile (i) și (ii) sunt adevărate.

Observație 5.2.31. *(***B. Burjan-Mosoni (Mosoni)***, S. László [47])*
Considerăm ipoteza Teoremei 5.2.30 și respectând notațiile folosite în demostrație, obținem

$$^{ic}(dom(G) - N(dom(F))) = ri(dom(G) - N(dom(F))),$$

sau echivalent

$$\begin{aligned} &{}^{ic}(pr_Y dom(g^*) - A(pr_X dom(f^*))) \\ &= ri(pr_Y dom(g^*) - A(pr_X dom(f^*))). \end{aligned}$$

Fie $X = Y$ și $A \equiv id_X$ în Teorema 5.2.30 atunci obținem corolarul următor.

Corolarul 5.2.32. *(***B. Burjan-Mosoni (Mosoni)***, S. László [47])*
Presupunem că $pr_X(dom(f^*)) \cap pr_Y(dom(g^*)) \neq \emptyset$.

a) Afirmațiile următoare sunt echivalente:

(i) Mulțimea $\{(x^* + x^*, x, x, r) : f(x, x^*) + g(y, y^*) \leq r\}$ este închisă cu privire la $X^* \times \Delta_X \times \mathbb{R}$ în topologia $(X^*, \|\cdot\|_*) \times (X, \|\cdot\|) \times (X, \|\cdot\|) \times \mathbb{R}$, unde $\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\}$.

(ii) $(f^* \square_1 g^*)^*(x, x^*) = (f \square_2 g)(x, x^*)$ și $f \square_2 g$ este exactă pentru orice $(x, x^*) \in X \times X^*$.

b) Dacă

$$\begin{aligned} 0 \in &{}^{ic}(pr_X dom(g^*) - pr_X dom(f^*)) \\ &= ri(pr_X dom(g^*) - pr_X dom(f^*)) \end{aligned}$$

atunci afirmațiile (i) și (ii) sunt adevărate.

5.3 Maximal monotonia operatorului $S+A^*TA$

În această secțiune dăm câteva condiții suficiente, care să asigure maximal monotonia lui $S + A^*TA$, unde S și T sunt operatori maximal monotoni de tip Gossez (D).

Teorema 5.3.33. *(***B. Burjan-Mosoni (Mosoni)***, S. László [47]) Fie $A : X \to Y$ un operator liniar și continuu și A^* operatorul adjunct al lui A, iar A^{**} biadjunctul lui A. Fie $S : X \to 2^{X^*}$ și $T : Y \to 2^{Y^*}$ doi operatori monotoni tare-reprezentabili (strongly-representable monotone operators) cu funcțiile de reprezentare (strong representative functions) h_S și h_T astfel încât $A(pr_X(dom(h_S))) \cap (pr_Y(dom(h_T))) \neq \emptyset$. Considerăm funcția $h : X \times X^* \to \overline{\mathbb{R}}$, $h(x, x^*) = cl_{\|\cdot\|\times\|\cdot\|_*}(h_S \triangle_2^A h_T)(x, x^*)$. Presupunem că următoarele condiții sunt satisfăcute:*

(a) $0 \in {}^{ic}(pr_Y dom(h_T) - A(pr_X dom(h_S)))$*;*

(b) mulțimea $\{(x^* + A^*y^*, x^{**}, y^{**}, r) : h_S^*(x^*, x^{**}) + h_T^*(y^*, y^{**}) \leq r\}$ *este închisă cu privire la* $X^* \times \Delta_{X^{**}}^{A^{**}} \times \mathbb{R}$ *în topologia* $(X^*, w^*) \times (X^{**}, w^*) \times (Y^{**}, w^*) \times \mathbb{R}$*, unde* $\Delta_{X^{**}}^{A^{**}} = \{(x^{**}, A^{**}x^{**}) : x^{**} \in X^{**}\}$.

Atunci h este funcție de reprezentare (strong representative function) a lui $S + A^*TA$ și $S + A^*TA$ este operatorul monoton tare-reprezentabil (strongly-representable monotone operator).

Dacă presupunem că X și Y sunt spații Banach reflexive, atunci avem următorul rezultat:

Teorema 5.3.34. *(***B. Burjan-Mosoni (Mosoni)***, S. László [47]) Fie $A : X \to Y$ un operator liniar și continuu și A^* operatorul adjunct a lui A. Fie $S : X \to 2^{X^*}$ și $T : Y \to 2^{Y^*}$ doi operatori maximal monotoni cu funcții de reprezentare (representative functions) h_S și h_T, astfel încât $A(pr_X(dom(h_S^*))) \cap (pr_Y(dom(h_T^*))) \neq \emptyset$. Considerăm funcția $h : X \times X^* \to \overline{\mathbb{R}}$, $h(x, x^*) = (h_S^* \triangle_1^A h_T^*)^*(x, x^*)$. Presupunem că următoarele condiții sunt satisfăcute:*

(a) $0 \in {}^{ic}(pr_Y dom(h_T^*) - A(pr_X dom(h_S^*)))$*;*

(b) mulțimea $\{(x^* + A^*y^*, x, y, r) : h_S(x, x^*) + h_T(y, y^*) \leq r\}$ *este închisă cu privire la* $X^* \times \Delta_X^A \times \mathbb{R}$ *în topologia* $(X^*, \|\cdot\|_*) \times (X, \|\cdot\|) \times (Y, \|\cdot\|) \times \mathbb{R}$.

Atunci h este funcția de reprezentare (representative function) a lui $S + A^*TA$ și $S + A^*TA$ este un operator maximal monoton.

5.4 Cazuri particulare

Fie $X = Y$ și $A \equiv id_X$, atunci suma generalizată $S + A^*TA$ devine $S + T$ și $\triangle_1^A$, $\triangle_2^A$ devin $\Box_1$, $\Box_2$, de aceea din Teorema 5.3.33 obținem:

Corolarul 5.4.35. (**B. Burjan-Mosoni (Mosoni)**, *S. László [47])*

Fie $S, T : X \to 2^{X^*}$ doi operatori monotoni tare-reprezentabili (strongly-representable monotone operators) cu funcțiile de reprezentare (strong representative functions) h_S și h_T astfel încât

$$(pr_X(dom(h_S))) \cap (pr_Y(dom(h_T))) \neq \emptyset,$$

și considerăm funcția $h : X \times X^* \to \overline{\mathbb{R}}$,

$$h(x, x^*) = cl_{\|\cdot\| \times \|\cdot\|_*}(h_S \Box_2 h_T)(x, x^*).$$

Presupunem că următoarele condiții sunt satisfăcute:

(a) $0 \in {}^{ic}(pr_X dom(h_T) - pr_X dom(h_S))$;

(b) mulțimea $\{(x^* + y^*, x^{**}, y^{**}, r) : h_S^*(x^*, x^{**}) + h_T^*(y^*, y^{**}) \leq r\}$ este închisă cu privire la $X^* \times \Delta_{X^{**}} \times \mathbb{R}$ în topologia $(X^*, w^*) \times (X^{**}, w^*) \times (X^{**}, w^*) \times \mathbb{R}$ unde $\Delta_{X^{**}} = \{(x^{**}, x^{**}) : x^{**} \in X^{**}\}$.

Atunci h este funcția de reprezentare (representative function) a lui $S+T$ și $S+T$ este un operator maximal monoton.

Acum presupunem că X este un spațiu Banach reflexiv. Atunci obținem următorul corolar:

Corolarul 5.4.36. (**B. Burjan-Mosoni (Mosoni)**, *S. László [47]) Fie $S, T : X \to 2^{X^*}$ doi operatori monotoni tare-reprezentabili (strongly-representable monotone operators) cu funcțiile de reprezentare (strong representative functions) h_S și h_T astfel încât*

$$pr_X(dom(h_S^*)) \cap pr_X(dom(h_T^*)) \neq \emptyset.$$

Considerăm funcția $h : X \times X^* \to \overline{\mathbb{R}}$

$$h(x, x^*) = (h_S^* \Box_1 h_T^*)^*(x, x^*).$$

Presupunem că următoarele condiții sunt satisfăcute:

(a) $0 \in {}^{ic}(pr_X dom(h_T^*) - pr_X dom(h_S^*))$;

(b) mulțimea $\{(x^* + y^*, x, y, r) : h_S(x, x^*) + h_T(y, y^*) \leq r\}$ este închisă cu privire la $X^* \times \Delta_X \times \mathbb{R}$ în topologia $(X^*, \|\cdot\|_*) \times (X, \|\cdot\|) \times (X, \|\cdot\|) \times \mathbb{R}$.

Atunci h este funcția de reprezentare (representative function) a lui $S+T$ și $S+T$ este operatorul maximal monoton.

Din Teorema 5.3.33 obținem următorul

Corolarul 5.4.37. *(***B. Burjan-Mosoni (Mosoni)***, S. László [47]) Fie $T : Y \to 2^{Y^*}$ un operator monoton tare-reprezentabil (strongly-representable monotone operator) cu funcția de reprezentare (strong representative function) h_T și $A : X \to Y$ liniară și continuă astfel încât ($im\ A \cap pr_Y(domh_T) \neq \emptyset$). Presupunem că următoarele condiții sunt satisfăcute:*

(a) $0 \in {}^{ic}(im\ A - pr_Y(domh_T))$;

(b) mulțimea $\{(A^*v^*, v^{**}, r) : r \in \mathbb{R}, h_T^*(v^*, v^{**}) \leq r\}$ *este închisă cu privire la* $X^* \times im\ A^{**} \times \mathbb{R}$ *în topologia* $(X^*, w^*) \times (Y^{**}, w^*) \times \mathbb{R}$.

Atunci funcția $h : X \times X^* \to \overline{\mathbb{R}}$, $h(x, x^*) = cl_{\|\cdot\| \times \|\cdot\|_*} h_T^A(x, x^*)$ *este funcție de reprezentare (strong representative function) a lui A^*TA și A^*TA este operatorul monoton tare-reprezentabil (strongly-representable monotone operator).*

Fie X și Y spații Banach reflexive. Atunci din Teorema 5.3.34 obținem corolarul următor:

Corolarul 5.4.38. *(***B. Burjan-Mosoni (Mosoni)***, S. László [47]) Fie $T : Y \to 2^{Y^*}$ un operator monoton tare-reprezentabil (strongly-representable monotone operator) cu funcța de reprezentare (strong representative function) h_T și $A : X \to Y$ liniară și continuă astfel încât ($im\ A \cap pr_Y(domh_T) \neq \emptyset$). Presupunem că următoarele condiții sunt satisfăcute:*

(a) $0 \in {}^{ic}(im\ A - pr_Y(domh_T))$;

(b) mulțimea $\{(A^*v^*, v, r) : r \in \mathbb{R}, h_T(v, v^*) \leq r\}$ *este închisă cu privire la* $X^* \times im\ A \times \mathbb{R}$ *în topologia* $(X^*, |\cdot\|_*) \times (Y, |\cdot\|) \times \mathbb{R}$.

Atunci funcția $h : X \times X^* \to \overline{\mathbb{R}}$, $h(x, x^*) = h_T^A(x, x^*)$ *este funcție de reprezentare (representative function) a lui A^*TA și A^*TA este operatorul monoton reprezentabil (representable monotone operator).*

Bibliografie

[1] Y.I. Alber: *The penalty method for variational inequalities with nonsmooth unbounded operators in Banach space,* Numer. Funct. Analysis Optim. vol. 16, pp. 1111-1125, 1995

[2] A. Aleman: *On Some Generalizations of Convex Sets and Convex Functions*, Mathematica - Revue d'Analyse Numeriue et de la Theorie de l'Approximation, vol. 14, pp. 1-6, 1985

[3] C.D. Aliprantis, K.C. Border: *Infinite dimensional analysis,* Springer, Heidelberg, 1999

[4] L. Altangerel, R.I. Boţ, G. Wanka, *On gap functions for equilibrium problems via Fenchel duality*, Pacific Journal of Optimization, vol. 2, pp. 667-678, 2006

[5] L.Q. Anh, P.Q. Khanh: *Semicontinuity of the solution set of parametric multivalued vector quasiequilibrium problems,* J. of Math. Analysis and Appl. vol. 294, pp. 699-711, 2004

[6] L.Q. Anh, P.Q. Khanh: *On the Hölder continuity of solutions to parametric multivalued vector equilibrium problems,* J. of Math. Analysis and Appl. vol. 321, pp. 308-315, 2006

[7] L.Q. Anh, P.Q. Khanh: *On the Stability of the Solution Sets of General Multivalued Vector Quasiequilibrium Problems,* J. Opt. Theory Appl. vol. 135, pp. 271-284, 2007

[8] L.Q. Anh, P.Q. Khanh: *Various kinds of semicontinuity and the solution sets of parametric multivalued symmetric vector quasiequilibrium problems,* J. Global Optim. vol. 41, pp. 539-558, 2008

[9] L.Q. Anh, P.Q. Khanh: *Uniqueness and Hölder continuity of the solution to multivalued equilibrium problems in metric spaces,* J. Global Optim., DOI 10.1007/s10898-006-9062-8

[10] L.Q. Anh, P.Q. Khanh: *Sensitivity analysis for multivalued quasiequilibrium problems in metric spaces: Hölder continuity of solutions,* J. Global Optim., DOI 10.1007/s10898-007-9268-4

[11] Q.H. Ansari, I.V. Konnov, J.C. Yao: *Characterization of solutions for vector equilibrium problems,* J Optim Theory Appl vol. 113, nr. 3, pp. 435-447, 2002

[12] Q.H. Ansari, I.V. Konnov, J.C. Yao: *Existence of a solution and variational principles for vector equilibrium problems,* J. Optim. Theory Appl. vol. 110, pp. 481-492, 2001

[13] J. Arin, V. Feltkamp: *The nucleolus and kernel of veto-rich transferable utility games.* Int J Game Theory vol. 26, pp. 61-73, 1997

[14] J.P. Aubin: *Mathematical methods of game and economic theory*, North Holland, Amsterdam, 1979

[15] J.P. Aubin, H. Frankowska: *Set-Valued Analysis,* Birkhäuser, Boston, Massachusetts, 1990

[16] J.P. Aubin, H. Frankowska: *Set-valued analysis, systems and control: foundations and applications,* Birkhäuser, 1984

[17] M. Avriel, W.E. Diewert, S. Schaible, I. Zang: *Generalized concavity,* Plenum Press, New York, 1988

[18] T. Başar, G.J. Olsder: *Dynamic noncooperative game theory (second edition)*, SIAM, Philadelphia, 1999

[19] H.H. Bauschke: *Fenchel duality, Fitzpatrick functions and the extension of firmly nonexpansive mappings*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 135, pp. 135-139, 2007

[20] H.H. Bauschke, D.A. McLaren, H.S. Sendov: *Fitzpatrick functions: inequalities, examples and remarks on a problem by S. Fitzpatrick*, Journal of Convex Analysis, vol. 13, pp. 499-523, 2006

[21] E. Bednarczuk: *An approach to well-posedness in vector optimization: consequences to stability,* Control Ciber, vol. 23, pp. 107–122, 1994

[22] E. Bednarczuk, J.P. Penot: *Metrically well-set minimization problems,* Applied Mathematics and Optimization, vol. 26, pp. 273–285, 1992

[23] E. Bednarczuk, J.P. Penot: *On the positions of the notions of well-posed minimization problems,* Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, vol. 7, pp. 665–683, 1992

[24] M. Bianchi, N. Hadjisavvas, S. Schaible: *Vector equilibrium problems with generalized monotone bifunctions,* J. Optim. Theory Appl. vol. 92, pp. 527-542, 1997

[25] M. Bianchi, G. Kassay, R. Pini: *Well-posed equilibrium problems,* Nonlinear Analysis, vol. 72, pp. 460-468, 2010

[26] M. Bianchi, G. Kassay, R. Pini: *Well-posedness for vector equilibrium problems,* Math. Meth. Oper. Res, vol. 70, pp. 171-182, 2009

[27] M. Bianchi, R. Pini: *A Note on Equilibrium Problems with Properly Quasimonotone Bifunctions*, Journal of Global Optimization, vol. 20, pp. 67-76, 2001

[28] M. Bianchi, R. Pini: *Coercivity conditions for equilibrium problems*, Journal of Optimization Theory and Applications vol. 124, pp. 79-92, 2005

[29] M. Bianchi, S. Schaible: *Generalized monotone bifunctions and equilibrium problems*, Journal of Optimization Theory and Applications vol. 90, pp. 31-43, 1996

[30] G. Bigi, M. Castellani, G. Kassay: *A dual view of equilibrium problems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications vol. 342, pp. 17-26, 2008

[31] E. Blum, W. Oettli: *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, The Mathematics Student vol. 63, pp. 123-145, 1994

[32] J.M. Borwein: *Maximality of sums of two maximal monotone operators in general Banach space*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 135, pp. 3917-3924, 2007

[33] J.M. Borwein, A.S. Lewis: *Partially finite convex programming, part I: Quasi relative interiors and duality theory*, Mathematical Programming, vol. 57, pp. 15-48, 1992

[34] J.M. Borwein, V. Jeyakumar, A.S. Lewis, H. Wolkowicz: *Constrained approximation via convex programming*, Preprint, University of Waterloo, 1988

[35] J.M. Borwein, R. Goebel: *Notions of relative interior in Banach spaces*, Journal of Mathematical Sciences, vol. 115, pp. 2542-2553, 2003

[36] R.I. Boţ: *Conjugate duality in convex optimization*, Springer, 2010

[37] R.I. Boţ, E.R. Csetnek: *An application of the bivariate inf-convolution formula to enlargments of monotone operators*, Set-Valued Anal, vol. 16, pp. 983-997, 2008

[38] R.I. Boţ, S.M. Grad, G. Wanka: *Almost Convex Functions: Conjugacy and Duality. In: Konnov, I., Luc, D.T., Rubinov, A. (eds.) Generalized Convexity and Related Topics* Lecture Notes in Economics vol. 583, pp. 101-114, Springer-Verlag, Berllin Heidelberg, 2007

[39] R.I. Boţ, S.M. Grad, G. Wanka: *Duality in Vector Optimization*, Springer Berlin, Heidelberg, Germany, 2009

[40] R.I. Boţ, S.M. Grad, G. Wanka: *Maximal monotonicity for the precomposition with a linear operator*, SIAM Journal on Optimization, vol. 17, pp. 1239-1252, 2006

[41] R.I. Boţ, S.M. Grad, G. Wanka: *Weaker constraint qualifications in maximal monotonicity*, Numerical Functional Analysis and Optimization, vol. 28, pp. 27-41, 2007

[42] R.S. Burachik, S. Fitzpatrick, *On a family of convex functions associated to subdifferentials*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, vol. 6, pp. 165-171, 2005

[43] R.S. Burachik, B.F. Svaiter, *Maximal monotonicity, conjugation and duality product*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 131, pp. 2379-2383, 2003

[44] R.S. Burachik, B.F. Svaiter, *Maximal monotone operators, convex functions and a special family of enlargements*, Set-Valued Analysis, vol. 10, pp. 297-316, 2002

[45] **B. Burjan-Mosoni (Mosoni)** *Equilibrium problems, noncooperative games and Tikhonov well posedness*, submitted

[46] **B. Burjan-Mosoni (Mosoni)**, S. László: *Existence results and gap functions for a generalized equilibrium problem involving composite functions*, submitted

[47] **B. Burjan-Mosoni (Mosoni)**, S. László: *About the Maximal Monotonicity of the Generalized Sum of Two Maximal Monotone Operators*, Set-Valued and Variational Analysis, accepted, DOI: 10.1007/s11228-011-0202-z

[48] R. Branzei, D. Dimitrov, S.H. Tijs: *Models in Cooperative Games Theory* 2nd edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008

[49] W.W. Breckner, G. Kassay: *A Systematization of Convexity Concepts for Sets and Functions*, Journal of Convex Analysis, vol. 4, pp. 1-19, 1997

[50] H. Brézis, G. Nirenberg, G. Stampacchia: *A remark on Ky Fan's minimax principle*, Bollettino U.M.I. vol. 6, pp. 293-300, 1972

[51] A. Capătă, G. Kassay, *On vector equilibrium problems and applications*, Taiwanese Journal of Mathematics, vol 15, pp. 365-380, 2011

[52] A. Capătă, G. Kassay, **B. Mosoni**: *On weak multifunctions equilibrium problems*, The Special Volume in Honour of Boris Mordukhovich, Springer Optimization and its Application, vol. 47, pp. 133-148, 2010

[53] E. Cavazzuti, J. Morgan J: *Well Posed Saddle Point Problems in "Optimization theory and algorithms",* Proc. Conf. Confolant, France, 1981, pp. 61-76, 1983

[54] O. Chadli, S. Schaible, J.C. Yao: *Regularized Equilibrium Problems with Application to Noncoercive Hemivariational Inequalities,* J. Opt. Theory Appl. vol. 121, pp. 571-596, 2004

[55] O. Chadli, Y. Chiang, S. Huang: *Topological pseudomonotonicity and vector equilibrium problems,* J. Math. Analysis Appl. vol. 270, pp. 435-450, 2002

[56] S.S Chang, Y. Zhang: *Generalized KKM theorem and variational inequalities*, Journal of Mathematical Analysis and Applications vol. 159, pp. 208-223, 1991

[57] Y. Chiang: *Vector Superior and Inferior,* Taiwanese Journal of Mathematics, vol. 8, pp. 477-487, 2004

[58] R.E. Csetnek, *Overcoming the failure of the classical generalized interior-point regularity conditions in convex optimization. Applications of the duality theory to enlargements of maximal monotone operators*, Logos Verlag Berlin GmbH, Berlin, Germany, 2010

[59] J. Dattorro: *Convex Optimization and Euclidean Distance Geometry*, Meboo Publishing USA, 2005

[60] M. Davis, M. Maschler: *The Kernel of a Cooperative Game*, Naval Research Logistics Quarterly, vol. 12, pp. 223-259, 1965

[61] A.L. Donthchev, T. Zolezzi: *Well-posed optimization problems,* Lecture Notes in Mathematics, vol. 1543, Springer-Verlag, Berlin, 1993

[62] T.S.H. Driessen: *An Alternative Game Theoretic Analysis of a Bankruptcy Problem from the Talamud: the Case of the Greedy Bankruptcy Game*, Memorandum N. 1286, Faculty of Applied Mathematics, University of Twente, 1995

[63] T.S.H. Driessen: *Cooperative Games, Solutions, and Applications.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1988

[64] T.S.H. Driessen: *The greedy bankruptcy game: an alternative game theoretic analysis of a bankruptcy problem.* In: Game Theory and Applications IV (L.A. Petrosjan and V.V. Mazalov, eds.), Nova Science Publ. pp. 45-61, 1998

[65] T.S.H. Driessen, A. Khmelnitskaya, J. Sales: 1-*Concave basis for TU games.* Memorandum No. 1777, Department of Applied Mathematics, University of Twente, Enschede, The Netherlands, 2005.

[66] T.S.H. Driessen, V. Fragnelli, A. Khmelnitskaya, Y. Katsev: *Co-Insurance Games,* 1-*Convexity, and the Nucleolus.* Memorandum, Department of Applied Mathematics, University of Twente, Enschede, The Netherlands, 2009

[67] T.S.H. Driessen, D. Hou: *A note on the nucleolus for* 2*-convex* n*-person TU games.* Int J Game Theory Vol. 39, pp. 185-189, 2010

[68] I. Ekeland, R. Temam: *Convex Analysis and Variational Problems*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Netherlands, 1976

[69] K. Fan: *A minimax inequality and its application, In: "Inequalities" (O. Shisha ed.)*, Academic Press, New York, vol. 3, pp. 103-113, 1972

[70] K. Fan: *A generalization of Tychonoff's fixed point theorem*, Math. Ann., vol. 142, pp. 305-310, 1961

[71] C. Finet, L. Quarta: *Vector-valued perturbed equilibrium problems*, J. Math. Analysis Appl., vol. 343, pp. 531-545, 2008

[72] S. Fitzpatrick: *Representing monotone operators by convex functions*, in: Workshop/Miniconference on Functional Analysis and Optimization (Canberra, 1988), Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University, Canberra, vol. 20, pp. 59-65, 1988

[73] M. Furi, A. Vignoli: *A characterization of well-posed minimum problems in a complete metric space,* Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 5, nr. 6, pp. 452–461, 1970

[74] M. Furi, A. Vignoli: *About well-posed optimization problems for functionals in metric spaces,* Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 5, nr. 3, pp. 225–229, 1970.

[75] J.-P. Gossez: *Opérateurs monotones non lonéaires dans les espaces de Banach non réflexifs*, J. Math. Anal. Appl., vol. 34, pp. 371-395, 1971

[76] N. Hadjisavvas, S. Schaible: *From scalar to vector equilibrium problems in the quasimonotone case,* J. Optim. Theory Appl. vol. 96, pp. 297-309, 1998

[77] R.B. Holmes: *Geometric Functional Analysis and its Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1975

[78] D. Hou, T.S.H. Driessen, A. Meseguer-Artola, **B. Mosoni** *Characterization and Calculation of the Prekernel and Nucleolus for four Subclasses of TU Games through its Indirect Function,* submitted

[79] L. Huang: *Existence of solutions on weak vector equilibrium problems,* Nonlinear Analysis, vol. 65, pp. 795-801, 2006

[80] N.J. Huang, J. Li, S.Y. Wu: *Gap Functions for a System of Generalized Vector Quasi-equilibrium Problems with Set-valued Mappings*, Journal of Global Optimization vol. 41, pp. 401-415, 2008

[81] N.J. Huang, X.J. Long, C.W. Zhao: *Well-posedness for vector quasi-equilibrium problems with applications,* Journal of Industrial and Management Optimization, vol. 5, nr. 2, pp. 341–349, 2009

[82] A.N. Iusem, G. Kassay, W. Sosa: *On certain conditions for the existence of solutions of equilibrium problems*, Mathematical Programming, 2007

[83] A.N. Iusem, W. Sosa: *New existence results for equilibrium problems,* Nonlinear Analysis, vol. 52, pp. 621–635, 2003

[84] A.N. Iusem, W. Sosa: *Iterative algorithms for equilibrium problems*, Journal of Optimization vol. 52, pp. 301-316, 2003

[85] V. Jeyakumar, *A generalization of a minimax theorem of Fan via a theorem of the alternative*, Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 48, pp. 525-533, 1986

[86] V. Jeyakumar, H. Wolkowicz, *Generalizations of Slater's constraint qualification for infinite convex programs*, Mathematical Programming Series B, vol. 57, pp. 85-101, 1992

[87] A.J. Jones: *Game theory: mathematical models of conflict*, Horwood Publishing, Chicester, 2000

[88] G. Kassay: *The Equilibrium Problem and Related Topocs,* Risoprint, Cluj-Napoca, 2000

[89] G. Kassay, J. Kolumbán: *On generalized sup-inf problem*, Journal of Optimization Theory and Application, vol. 91, pp. 651-670, 1996

[90] B. Knaster, C. Kuratowski, S. Mazurkiewicz *Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe*, Fund. Math. vol. 14, pp. 132-138, 1929

[91] I. Konnov: *Generalized Monotone Equilibrium Problems and Variational Inequalities. In: Hadjisavvas, N., Komlósi, S., and Schaible, S. (eds.) Handbook of Generalized Convexity and Generalized Monotonicity,* Springer, New York, vol. 76, chapter 13, pp. 559-618, 2005

[92] H.W. Kuhn: *Lectures on the theory of games*, Princeton University Press, Princeton, 2003

[93] Z.F. Li: *Benson proper efficiency in the vector optimization of set-valued maps*, Journal of Optimization Theory and Applications vol. 98, pp. 623-649, 1998

[94] S.X. Li: *Quasiconvexity and Nondominated Solutions in Multiple-Objective Programming*, Journal of Optimization Theory and Applications vol. 88, pp. 197- 208, 1996

[95] L.J. Lin, Z.T. Yu, G. Kassay: *Existence of equilibria for multivalued mappings and its application to vectorial equilibria,* J. Optim. Theory Appl. vol. 114, pp. 189-208, 2002

[96] D.T. Luc: *Theory of Vector Optimization,* Springer-Verlag, Berlin, 1989

[97] R. Lucchetti: *Convexity and Well-Posed Problems,* CMS Books in Mathematics, Canadian Mathematical Society, Springer, 2006

[98] R. Lucchetti, F. Patrone, S. Tijs *Determinateness of two-person game* Bollettino U.M.I., vol. 6, pp. 907-924, 1986

[99] M. Maschler, B. Peleg, L.S. Shapley, *Geometric properties of the kernel, nucleolus, and related solution concepts.* Mathematics of Operations Research, vol. 4, pp. 303-338, 1979

[100] J.E. Martinez-Legaz: *Dual Representation of Cooperative Games Based on Fenchel-Moreau Conjugation*, Optimization, vol. 36, pp. 291-319, 1996

[101] M. Margiocco, F. Patrone, L. Pusillo Chicco: *A new approach to Tikhonov well-posedness for Nash equilibria,* Optimization, vol. 40, pp. 385-400, 1997

[102] M. Margiocco, F. Patrone, L. Pusillo Chicco: *Metric Characterizations of Tikhonov Well-posedness in Value,* J. Opt. Theory Appl. vol. 100, pp. 377-387, 1999

[103] M. Margiocco, L. Pusillo: (ϵ, k) *Equilibria and Well Posedness* International Game Theory Review (IGTR), vol. 8, pp. 33-44, 2006

[104] J.E. Martínez-Legaz, M. Théra: *A convex representation of maximal monotone operators*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, vol. 2, pp. 243-247, 2001

[105] J.E. Martínez-Legaz, B.F. Svaiter: *Monotone operators representable by l.s.c. convex functions*, Set-Valued Analysis vol. 13, pp. 21-46, 2005

[106] M. Marques Alves, B.F. Svaiter: *Bronsted-Rockafellar property and maximality of monotone operators representable by convex functions in non-reflexive Banach spaces*, Journal of Convex Analysis, vol. 15, pp. 693-706, 2008

[107] M. Marques Alves, B.F. Svaiter: *A new old class of maximal monotone operators*, Journal of Convex Analysis, vol. 16, pp. 881-890, 2009

[108] M. Marques Alves, B.F. Svaiter: *On Gossez type (D) maximal monotone operators*, Journal of Convex Analysis, vol. 17, 2010

[109] M. Maschler, B. Peleg, L.S. Shapley: *Geometric Properties of the Kernel, Nucleolus, and Related Solution Concepts*, Mathematics of Operations Research, vol. 4, pp. 303-338, 1979

[110] M. Maschler, B. Peleg: *A Characterization, Existence Proof and Dimension Bounds for the Kernel of a Game*, Pacific Journal of Mathematics, vol. 18, pp. 289-328, 1966

[111] A. Meseguer-Artola: *Using the Indirect Function to Characterize the Kernel of a TU-game*, Working Paper, Department d'Historia Economica, Universitat Autonoma de Barcelona, 08193 Bellaterra, Spain, 1997

[112] R. E. Megginson, *An introduction to Banach space theory*, Series: Graduate Texts in Mathematics 183, Springer 1998.

[113] A. Moudafi, *On the Stability of the Parallel Sum of Maximal Monotone Operators*, J. Of Math. Anal. And App., vol. 199, pp. 478-488, 1996

[114] J.J. Moreau, *Fonctionnelles convexes*, Seminaire sur les Équation aux Dérivées Partielles, Collége de France, Paris, 1967

[115] E. Miglierina, E. Molho: *Well-posedness and convexity in vector optimization* Math Meth Oper Res, vol. 58, pp. 375–385, 2003

[116] E. Miglierina, E. Molho, M. Rocca: *Well-posedness and scalarization in vector optimization,* J Optim Theory Appl vol. 126, pp. 391–409, 2005

[117] S. Muto, M. Nakayama, J. Potters, S.H. Tijs: *On big boss games*, Economic Studies Quarterly, vol. 39, pp. 303-321, 1988

[118] J. Nash: *Equilibrium points in n-person games*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA vol. 36, pp. 48-49, 1950

[119] J. Nash: *Non-cooperative games*, Ann. of Math. vol. 54, pp. 286-295, 1951

[120] W. Oettli: *A remark on vector-valued equilibria and generalized monotonicity*, Acta Mathematica Vietnamita, vol. 22, pp. 215-221, 1997

[121] G. Owen: *Game Theory*, 3rd edition, Academic Press, San Diego, United States of America, 1995

[122] M. Quant, P. Borm, H. Reijnierse, B. van Velzen: *The core cover in relation to the nucleolus and the Weber set.* Int J Game Theory vol. 33, pp. 491-503, 2005

[123] F. Patrone: *Well Posedness for Nash Equilibria and Related Topocs in "Recent Developments in Well Posed Variational Problems",* Kluwer, Dordrecht, 1995

[124] S. Paeck: *Convexlike and concavelike conditions in alternative, minimax, and minimization theorems*, Journal of Optimization Theory and Applications vol. 74, pp. 317-332, 1992

[125] J.B. Passty: *The parallel sum of nonlinear monotone operators*, Nonlinear Anal. Theory Methods Appl., vol. 10, pp. 215-227, 1986

[126] J.P.Penot: *Glimpses upon quasiconvex analysis*, ESAIM: Proceedings, vol. 20, pp. 170-194, 2007

[127] J.P. Penot: *Is convexity useful for the study of monotonicity?*, in: R.P. Agarwal, D. O'Regan (eds.), "Nonlinear Analysis and Applications", Kluwer, Dordrecht, vol. 1, 2, pp. 807-822, 2003

[128] J.P. Penot: *A representation of maximal monotone operators by closed convex functions and its impact on calculus rules*, Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris, vol. 338, pp. 853-858, 2004

[129] J.P. Penot: *The relevance of convex analysis for the study of monotonicity*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications vol. 58, pp. 855-871, 2004

[130] J.P. Penot, C. Zălinescu, *Convex analysis can be helpful for the asymptotic analysis of monotone operators*, Math. Program., Ser. B, vol. 116, pp.481-498, 2009

[131] J.P. Penot, C. Zălinescu, *Some problems about the representation of monotone operators by convex functions*, ANZIAM J. vol. 47, pp. 1-20, 2005

[132] J. Potters, R. Poos, S. Muto, S.H. Tijs: *Clan games*, Games and Economic Behavior, vol. 1, pp. 275-293, 1989

[133] L. Pusillo: *Well Posedness and Optimization Problems,* Variational Analysis and Applications, Nonconvex Optimization and Its Applications, vol. 79, part 2, pp. 889-904, 2005

[134] R.T. Rockafellar: *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970

[135] R.T. Rockafellar: *Conjugate duality and optimization*, Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Applied Mathematics, Society for Industrial and Aplied Mathematics, Philadelphia, 1974

[136] R.T. Rockafellar: *On the maximal monotonicity of subdifferential mappings,* Pacific Journal of Mathematics, vol. 33, pp. 209-216, 1970

[137] W. Rudin: *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1976

[138] J. Schauder: *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Math. vol. 2, pp. 171-180, 1930

[139] D. Schmeidler: *The Nucleolus of a Characteristic Function Game*, SIAM Journal of Applied Mathematics, vol. 17, pp. 1163-1170, 1969

[140] S. Simons: *From Hahn-Banach to Monotonicity*, Springer-Verlag, Berlin, 2008

[141] S. Simons: *Minimax and Monotonicity*, Springer-Verlag, Berlin, 1998

[142] S. Simons: *The range os a monotone operator*, J. Math. anal. Appl., vol. 199, pp. 176-201, 1996

[143] S. Simons: *Quadrivariate versions of the Attouch-Brezis theorem and strong representability*, submitted on 1 Sep 2008, last revised 22 Feb 2011

[144] S. Simons, C. Zălinescu: *Fenchel duality, Fitzpatrick functions and maximal monotonicity*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, vol. 6, pp. 1-22, 2005

[145] M.D. Voisei: *Calculus rules for maximal monotone operators in general Banach spaces*, Journal of Convex Analysis, vol. 15, pp. 73-85, 2008

[146] M.D. Voisei, C. Zălinescu: *Linear monotone subspaces of locally convex spaces*, Preprint, arXiv:0809.5287v1, posted 30 September, 2008

[147] M.D. Voisei, C. Zălinescu: *Strongly-representable monotone operators*, Journal of Convex Analysis, vol. 16, pp. 1011-1033, 2009

[148] M.D. Voisei, C. Zălinescu: *Maximal monotonicity criteria for the composition and the sum under minimal interiority conditions*, Math. Program. Ser. B, vol. 123, pp. 265-283, 2010

[149] N.N. Vorob'ev: *Game theory: lectures for economists and systems scientists*, Springer, New York 1977

[150] G. Wanka, R.I. Boţ: *On the Relation between Different Daul Problems in Convex Mathematical Programming*, Operations Research Proceedings 2001, Edited by P. Chamoni, R. Leisten, A. Martin, J. Minnemann, and H. Stadtler, Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, pp. 255-262, 2002

[151] L. Yao: *An affirmative answer to a problem posed by Zălinescu*, Journal of Convex Analysis, vol. 18, pp. 621-626, 2011

[152] J. Yu, H. Yang, C. Yu: *Well-posed Ky Fan's point, quasi-variational inequality and Nash equlibrium problems,* Nonlinear Analysis, vol. 66, pp. 777-790, 2007

[153] C. Zălinescu: *A comparison of constraint qualifications in infinite-dimensional convex programming revisited*, J. Austral. Math. Soc. Ser. B, vol. 40, pp. 353-378, 1999

[154] C. Zălinescu: *Convex Analysis in General Vector Spaces*, World Scientific, Singapore, 2002

[155] C. Zălinescu: *Solvability results for sublinear functions and operators*, Zeitschrift für Operations Research Series A-B, vol. 31, pp. A79-A101, 1987

[156] C. Zălinescu: *A new proof of the maximal monotonicity of the sum using the Fitzpatrick function*, in: F. Giannessi, A. Maugeri (eds.), Variational Analysis and Applications, Nonconvex Optimization and its Applications, Springer, New York, vol. 79, pp. 1159-1172, 2005

[157] T. Zolezzi: *Extended well-posedness of optimization problems,* Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 91, pp. 257–266, 1996